Wahrscheinlich gewinne ich.
Mit einfachen Überlegungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung über Gewinnstrategien bei Spielen nachdenken

MONIKA MUSILEK, WIEN

Dieser Beitrag gibt einen Einblick in die faszinierende Vielfalt an Möglichkeiten, wie Spiele einen interaktiven und kommunikativen Mathematikunterricht bereichern können. Es werden verschiedene Spiele vorgestellt, die neben dem Spaß am Spielen die Schülerinnen und Schüler auch dazu anregen, eigene Gewinnstrategien zu entwickeln und diese auf der Grundlage mathematischer Überlegungen zu treffen. Durch den Einsatz solcher Spiele werden Lernende darin gefördert, komplexe mathematische Probleme zu analysieren, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, gefundene Strategien geeignet darzustellen, Spielentscheidungen mathematisch zu begründen usw.

Einleitung

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten." Blaise Pascal, 1623 - 1662

Spiele werden als unterhaltsam empfunden und üben erfahrungsgemäß eine Faszination auf Kinder aus. Beim Spielen setzen sie sich aktiv und intensiv mit sich und ihrer Umwelt auseinander. Besonders lebhaft ist das Interesse, wenn es darum geht, zu diskutieren, wie man ein Spiel am besten gewinnt oder ob ein Spiel überhaupt fair ist. Diese Alltagserfahrung zeigt, dass ein gut ausgewähltes Spiel auch im Mathematikunterricht eine ideale Voraussetzung für einen erfolgreichen Lernprozess sein kann.

Spielerisches Lernen kann die Freude am Mathematiklernen erheblich steigern. Motivation und positive Emotionen sind entscheidend für erfolgreiches Mathematiklernen. Schukajlow et al. (2023, S. 259) zeigen in einer Metastudie, dass eine ausgeprägte motivationale und emotionale Bereitschaft zur Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten nicht nur zu verbesserten fachlichen Lernergebnissen führt, sondern auch als Lernergebnis des Mathematikunterrichts angesehen werden kann. Positive Emotionen haben dabei die Funktion eines Katalysators für mathematisches Lernen. Erfolgreiches mathematisches Lernen verstärkt wiederum positive Emotionen, was zu einem selbstverstärkenden Effekt im Fachunterricht führt. Spiele bieten darüber hinaus eine Atmosphäre für freies, ungezwungenes und angstfreies Lernen. „Die mathematische Zielrichtung wird zunächst gar nicht wahrgenommen, es wird ganz unbewusst gelernt. Und spätestens in der Reflexion wird das Lernziel erkannt." (Projekt Mathematische Bildung, 2011) Allerdings bedürfen Spiele einer pädagogischen Begleitung, um Lernprozesse tatsächlich fruchtbar zu machen. (Sagmeister et al., 2022; Skene et al., 2022)

Um Spiele gewinnbringend im Mathematikunterricht einsetzen zu können, nennt Käpnick (2014, S. 185) unter anderen folgende Anforderungen:

- Spielregeln, die leicht verständlich und eindeutig sind,
- Spielutensilien, die einfach zu beschaffen und zu handhaben sind,
- eine häufige Wiederholbarkeit des Spiels,
- Variabilitätsmöglichkeiten der Spiel- und Gewinnregeln,
- eine angemessene Spieldauer.

Um die Kreativität der Lernenden zu fördern, ist es auch reizvoll, wenn es Spiele sind, deren Regeln sich so verändern lassen, dass sie wieder Ausgangspunkt für mathematische Untersuchungen sein können. Die Spiele, die in diesem Beitrag vorgestellt werden, erfüllen diese Anforderungen. Sie sind für den Unterricht in der Sekundarstufe 1 konzipiert worden, insbesondere um im Themenbereich Stochastik eingesetzt zu werden.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 56, 2024, S. 107 - 123.

Erst seit der Lehrplanreform 2023 sind stochastische Themenstellungen im österreichischen Lehrplan der Sekundarstufe 1 verankert (BMBWF, 2023). Die zentralen fachlichen Konzepte im Kompetenzbereich Daten und Zufall werden im Lehrplan in den Anwendungsbereichen für die 3. und 4. Klasse folgendermaßen konkretisiert:

Tab. 1: Konkretisierung der Kompetenzbeschreibung

3. Klasse	„Die Schülerinnen und Schüler können aufbauend auf einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff Wahrscheinlichkeiten in einfachen Zufallsexperimenten ermitteln, vergleichen und interpretieren. – Verwenden eines intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs zur Quantifizierung von Sicherheit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe empirisch gewonnener relativer Häufigkeiten – Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten (z.B. Münzwurf, Würfeln); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagewert für relative Häufigkeiten" (BMBWF, 2023, S. 86)
4. Klasse	„Die Schülerinnen und Schüler können Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten ermitteln und interpretieren. – Wiederholen und Festigen: Erstellen und Interpretieren von Baumdiagrammen; Ermitteln und Interpretieren von Laplace-Wahrscheinlichkeiten – Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten (auch mit Hilfe von Baumdiagrammen); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten" (BMBWF, 2023, S. 88)

Diese inhaltlichen Kompetenzbereiche (zentrale fachliche Konzepte) werden mit den mathematischen Prozessen Modellieren & Problemlösen, Operieren, Darstellen & Interpretieren und Vermuten & Begründen verschränkt. Die mathematische Kompetenz der Schülerinnen und Schüler zeigt sich dann in der Fähigkeit, diese Handlungen im Rahmen der zentralen fachlichen Konzepte durchführen zu können.

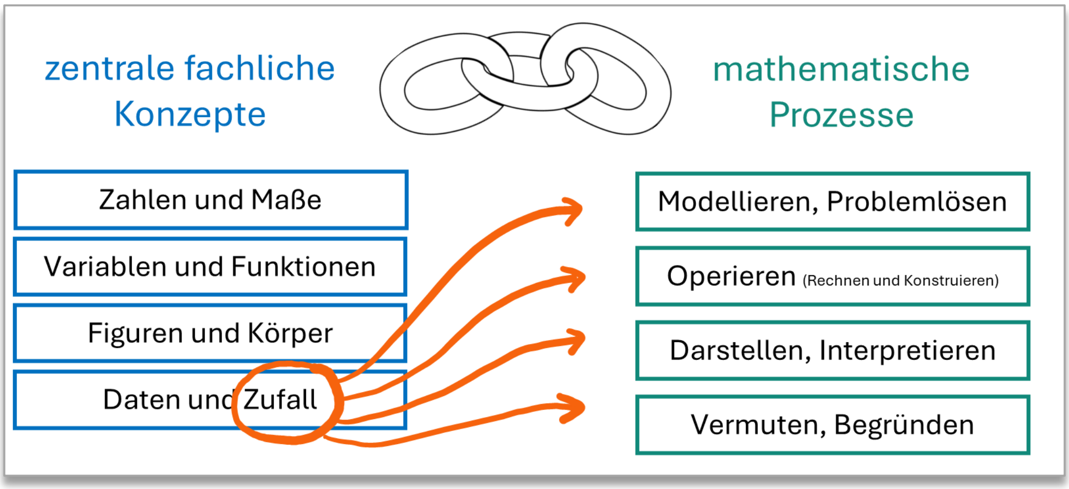

Abb. 1: zentrale fachliche Konzepte und mathematische Prozesse im Lehrplan der Sekundarstufe 1

Kombiniert man also zentrale fachliche Konzepte aus dem Bereich Daten und Zufall mit Spielen, so lassen sich im Mathematikunterricht alle im Lehrplan genannten mathematischen Prozesse fördern (siehe dazu auch Abb. 1):

- Modellieren: Beim Spielen werden mathematische Modelle verwendet, um Situationen zu analysieren und Lösungen zu finden.
- Problemlösen: Spiele erfordern von den Schülerinnen und Schülern das Lösen mathematischer Probleme und das Finden von Lösungsstrategien.
- Operieren: Berechnungen von relativen Häufigkeiten, von Laplace-Wahrscheinlichkeiten müssen durchgeführt werden.
- Darstellen: Spiele erfordern das Darstellen mathematischer Konzepte und Lösungen auf verschiedene Weisen, z.B. durch Diagramme oder Skizzen. Lösungswege können auf unterschiedliche Arten dargestellt werden: In Form von Tabellen werden Daten gesammelt. Baumdiagramme oder andere Darstellungen werden von den Lernenden während der Suche nach Gewinnstrategien entwickelt.
- Interpretieren: Spielverläufe, die andere Personen erstellt haben, müssen interpretiert werden. Ein Vergleich von Werten der relativen Häufigkeiten und berechneten Laplace-Wahrscheinlichkeiten wird durchgeführt.
- Vermuten und Begründen: Spiele bieten den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, ihre Entscheidungen zu begründen und mathematische Argumente vorzubringen.

Darüber hinaus fördert das Sprechen über Spiele die kommunikativen Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schülerinnen und Schülern. Durch Spiele werden sie dazu ermutigt, ihre Gedanken und Lösungsansätze zu kommunizieren und zu Grunde liegende mathematische Konzepte zu erklären.

Spiele in mathematische Lerngelegenheiten transformieren – ein Dreischritt

Mathematisches Denken und Handeln ist immer mit Vorstellungen verbunden. Gerade im Themenbereich Daten und Zufall gilt es diese Grundvorstellungen – also diese tragfähigen mathematischen Vorstellungen – aufzubauen. Im Rahmen des Mathematikunterrichts sollen folgende drei verschiedene Sichtweisen vermittelt werden, da sie zusammen das Verständnis einer Wahrscheinlichkeit ausmachen. (Kleine & Schmelzer, 2023; Malle & Malle, 2003; vom Hofe & Roth, 2023)

Die „subjektive“ Sichtweise bezieht sich auf den prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Hierbei werden Wahrscheinlichkeitsaussagen aufgrund von Expertenwissen, Erfahrung und Intuition getroffen. Die zugrunde liegende Vorstellung ist “Wahrscheinlichkeit als Grad subjektiven Vertrauens”. Beispiele hierfür sind Alltagssituationen wie Regenwahrscheinlichkeiten oder eben auch Gewinnerwartungen bei Spielen.

Die „objektiven“ Sichtweisen umfassen den statistischen und den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Der statistische oder auch frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreibt Wahrscheinlichkeiten als Stabilisierung der relativen Häufigkeiten in unendlich langen Versuchsserien. Diese Grundvorstellung betrachtet die “relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit”. In der

Schule werden dazu Versuchsreihen mit regelmäßigen (z. B. Kartendeck, Würfel) und unregelmäßigen Zufallsgeräten (z. B. Reißzwecke) verwendet, wo sich die relative Häufigkeit bei vielen Durchführungen stabilisiert.

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff geht auf Pierre Laplace zurück, und wird deshalb auch als Laplace-Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit wird hier als relativer Anteil, und zwar die Anzahl der günstigen Fälle im Verhältnis zur Gesamtzahl aller möglichen Fälle, betrachtet. Diese Sichtweise geht von der Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge eines Zufallsexperiments aus.

Mathematische Handlungserfahrungen sind als Basis für die Entwicklung von Grundvorstellungen zu sehen. Ausgehend vom spielerischen Zugang wird bei der unterrichtlichen Umsetzung ein Dreischritt vorgestellt, der es ermöglicht, Spiele, die auf Zufall und Wahrscheinlichkeit basieren, in mathematische Lerngelegenheiten zu transformieren, siehe Abb. 2.

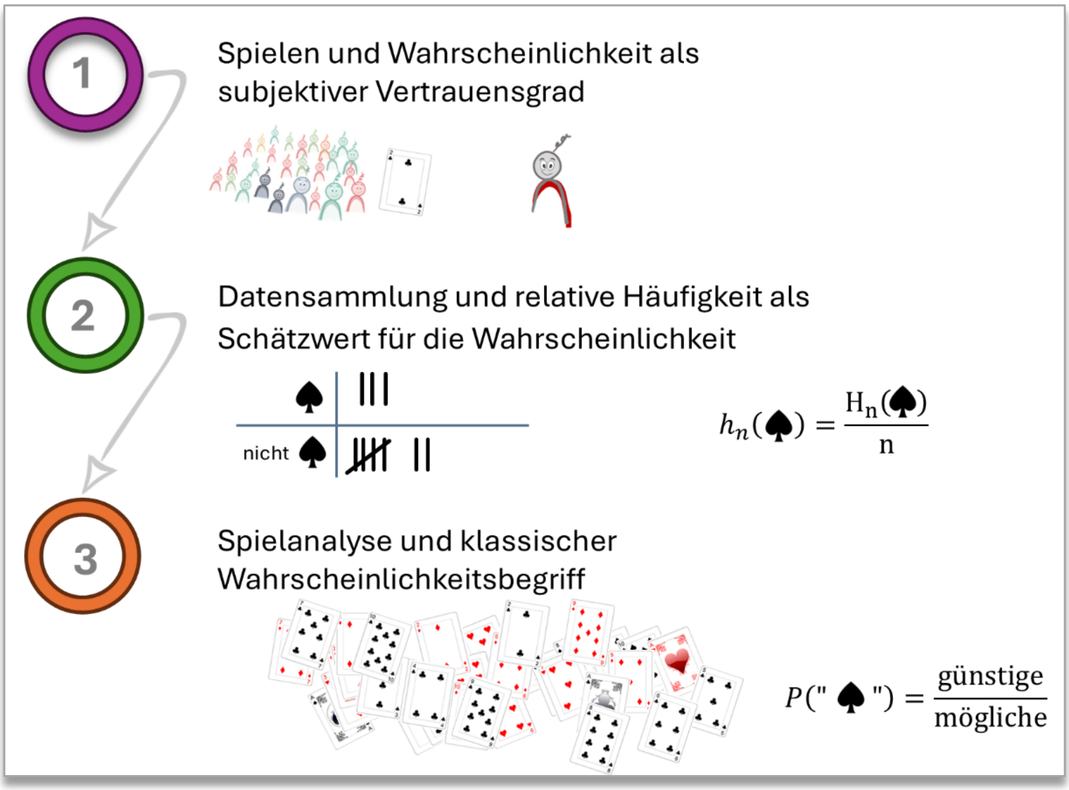

Abb. 2: Spiele in mathematische Lerngelegenheiten transformieren

1. Spielen und Wahrscheinlichkeit als subjektiver Vertrauensgrad:

Der Lernprozess beginnt mit dem Spiel. Spielen macht Spaß und schafft einen wertvollen Freiraum, der sich vom scheinbaren Perfektionismus des Mathematiklernens abhebt. Der geschaffene Freiraum ermöglicht ein Lernen durch Ausprobieren und Experimentieren, wobei das erworbene Wissen vorläufigen Charakter hat. Der besondere Reiz des Spielens liegt in der Möglichkeit, planvolles Handeln in einer entspannten und spannenden Umgebung zu üben. Durch die aktive Teilnahme sammeln die Lernenden Erfahrungen, die zu einer intuitiven Vorstellung von Wahrscheinlichkeiten führen. Die Lernenden gewinnen erste Eindrücke über das Eintreten bestimmter Ereignisse beim Ziehen bzw. Werfen von Objekten, sie geben erste Einschätzungen zu Gewinnwahrscheinlichkeiten ab. Diese informellen Schätzungen bilden die Grundlage für den nächsten Schritt.

2. Datensammlung und relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit:

Im vorliegenden Schritt erfolgt eine systematische Datenerhebung, um darauf basierend die Wahrscheinlichkeiten zu quantifizieren. Zu Beginn dieses Schritts ist es erforderlich, mögliche Darstellungsweisen zu finden, beispielsweise in Form von Tabellen, Strichlisten oder ähnlichem. Im Rahmen der Dokumentation der Spielverläufe erfolgt eine Berechnung der relativen Häufigkeiten, wodurch Wahrscheinlichkeiten mittels empirischer Werte geschätzt werden.

3. Spielanalyse und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:

Die Lernenden analysieren das Spiel (Material, Spielregeln). Durch Abzählen der möglichen und günstigen Ergebnisse erfolgt eine Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unter Zuhilfenahme der Laplace-Definition. Die erhaltenen Werte werden argumentativ diskutiert.

Die nachstehenden Spiele sind für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 im Themenbereich Daten und Zufall konzipiert. Sie sind in einer gleichbleibenden Struktur dargestellt: Im Abschnitt Hinweise werden zu Beginn zentrale fachliche Aspekte erläutert. Unter Materialien finden sich Informationen über benötigtes Spielmaterial. Bei allen Spielen wurde darauf geachtet, dass das Spielmaterial leicht verfügbar oder rasch selbst erstellbar ist, sodass stets alle Lernenden zur selben Zeit die Möglichkeit haben, das Spiel zu spielen. Ein Link zu einer digitalen Umsetzung mit GeoGebra wird angeboten, falls kein „angreifbares“ Material zur Verfügung steht. Ebenso werden Informationen zur Anzahl der Spielenden gegeben. Die Spielanleitung legt die Regeln dar. Didaktisch/methodische Ideen für den Einsatz im Unterricht orientieren sich an dem in diesem Beitrag vorgestellten Dreischritt, in dem alle drei genannten Grundvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit angesprochen werden.

Nur ein kleines Kartenspiel

Hinweise

Zentrale fachliche Aspekte:

Spiele können, müssen aber nicht fair sein. Ziel dieses Spiels ist es, eine erste Definition eines „fairen“ Spiels zu erarbeiten und darauf aufbauend die Fairness des Spiels „Nur ein kleines Kartenspiel“ zu beurteilen. Die Schülerinnen und Schülern erheben Daten, halten sie in Form einer Tabelle fest, ermitteln relative Häufigkeiten und nutzen diese Werte zur Argumentation. Durch gezielte Betrachtung eines Kartendecks ermitteln sie geeignete Laplace-Wahrscheinlichkeiten und interpretieren diese.

Materialien: Kartendeck mit 52 Karten

Digitale Umsetzung: https://www.geogebra.org/m/du43dunt

Spielende: 2 Personen (oder 2 Gruppen), GELB & BLAU

Spielanleitung: siehe Abb. 3

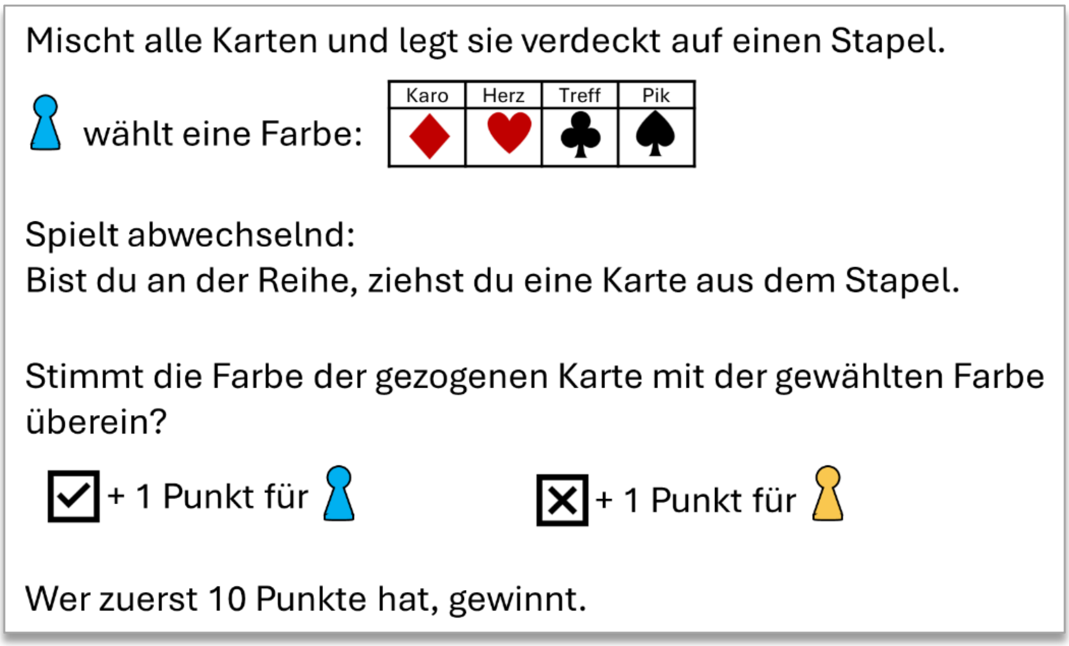

Abb. 3: Spielanleitung „Nur ein kleines Kartenspiel"

Didaktisch/methodische Ideen für den Einsatz im Unterricht

Um das Spiel in eine mathematische Lerngelegenheit zu transformieren, orientiert man sich am hier vorgestellten Dreischritt.

1. Spielen und Wahrscheinlichkeit als subjektiver Vertrauensgrad:

Zuerst wird das Spiel gemeinsam gespielt: Alle Schülerinnen und Schülern spielen gegen die Lehrperson. Die Schülerinnen und Schülern nehmen die Rolle BLAU (blaue Figur) ein und wählen eine Farbe. Abwechselnd werden Karten gezogen und die Ergebnisse in einer Tabelle an der Tafel festgehalten. Bereits nach wenigen Runden, wird die Vermutung geäußert werden: „Das ist ja voll unfair!“

Nun geht es in eine vertiefte Auseinandersetzung. In Partnerarbeit wird eine Definition für ein „faires Spiel“ erarbeitet. Im stochastischen Anfangsunterricht ist es wohl ausreichend, die Fairness eines Spiels über die Gewinnwahrscheinlichkeiten zu definieren:

> Ein Spiel ist fair, wenn es für alle Mitspielenden
> dieselbe Gewinnwahrscheinlichkeit gibt.

2. Datensammlung und relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit:

Die Lernenden spielen das Spiel mehrmals und dokumentieren ihre Ergebnisse. Für diese Untersuchung werden nur die Einzelereignisse betrachtet, also wie oft BLAU (blaue Figur) und wie oft GELB (gelbe Figur) einen Punkt bekommt. Ausgehend von den erhobenen Daten werden relative Häufigkeiten berechnet und auf diesen Werten basierend eine Begründung gefunden, ob das Spiel fair ist.

3. Spielanalyse und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:

In der weiteren Auseinandersetzung mit dem Spiel wird das Kartendeck untersucht. Ein Kartendeck besteht aus 4 Farben (Karo, Herz, Treff und Pik). Es gibt 52 Karten. Von jeder Farbe gibt es daher 13 Karten. Wird eine bestimmte Farbe gewählt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass diese Farbe gezogen wird, $\frac{13}{52}$. Die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Farbe gezogen wird, kann auch über die Argumentation erfolgen, dass es von jeder Farbe gleich viele Karten gibt, somit die Wahrscheinlichkeit, eine Karte einer bestimmten Farbe zu ziehen, $\frac{1}{4}$ ist.

Aufgrund der Erkenntnisse im Rahmen des hier skizzierten Lernprozesses (ausgehend von der intuitiven Einschätzung über den statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff zum klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff) lässt sich festhalten, dass das Spiel „Nur ein kleines Kartenspiel“ nicht fair ist. Aber kann man dieses Spiel in ein „faires“ Spiel verwandeln?

Hans Schupp (2002) liefert für die unterrichtliche Gestaltung dazu Ideen. Er hat das Variieren von Aufgaben durch Lernende umfassend aufbereitet. Die Aufgabenvariation ist ein systematisches Instrument, das helfen kann, Aufgaben zu erstellen oder die Erstellung von Aufgaben zu initiieren, die prozessbezogene Aktivitäten bei den Schülerinnen und Schülern anregen. Dabei werden zu Beginn die variierbaren Bestimmungselemente identifiziert und dann systematisch verändert.

Konkret auf dieses Spiel angewandt, sind die Bestimmungselemente etwa die Spielregel, die Anzahl der Mitspielenden und das Material. Zum Beispiel können die Lernenden eine „neue“ Spielregel erfinden und deren Variation wiederum im Rahmen des hier vorgestellten Dreischritts (Spielen und Intuition entwickeln, Daten sammeln und relative Häufigkeiten ermitteln, Analyse des Spiels und klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff anwenden) untersuchen. Es ist naheliegend, nach einer Spielregel zu suchen, die das Spiel fair macht. Eine Möglichkeit wäre, die Auswahl, die BLAU treffen darf, auf Rot oder Schwarz zu beschränken. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten, die Aufgabe zu variieren: Karten aus dem Spiel entfernen, ein anderes Kartenspiel verwenden, das Kartenspiel in ein Würfelspiel umwandeln oder die Anzahl der Mitspielenden erhöhen.

XXO

Hinweise

Zentrale fachliche Aspekte:

In der Spieltheorie bezeichnet der Begriff „Strategie” einen vollständigen Plan, der das Verhalten eines Spielers bzw. einer Spielerin in jeder denkbaren Spielsituation definiert. In der Konsequenz lässt sich festhalten, dass die Strategie das Spielverhalten eines Spielers bzw. einer Spielerin vollständig beschreibt. Eine Spielstrategie kann intuitiv entwickelt werden. In diesem Lernsetting geht es aber u.a. auch darum, eine gegebene Strategie im Spiel anzuwenden (sich an eine vorgegebene Strategie beim Spielen zu halten) und dann zu analysieren, ob sie „immer“ zu Erfolg führt.

Materialien: 3 Karten mit folgenden Symbolen auf Vorder- und Rückseite: X-O | X-X | O-O

Digitale Umsetzung: https://www.geogebra.org/m/dkmyjfmb

Spielende: 1 - 4 Personen

Spielanleitung: siehe Abb. 4

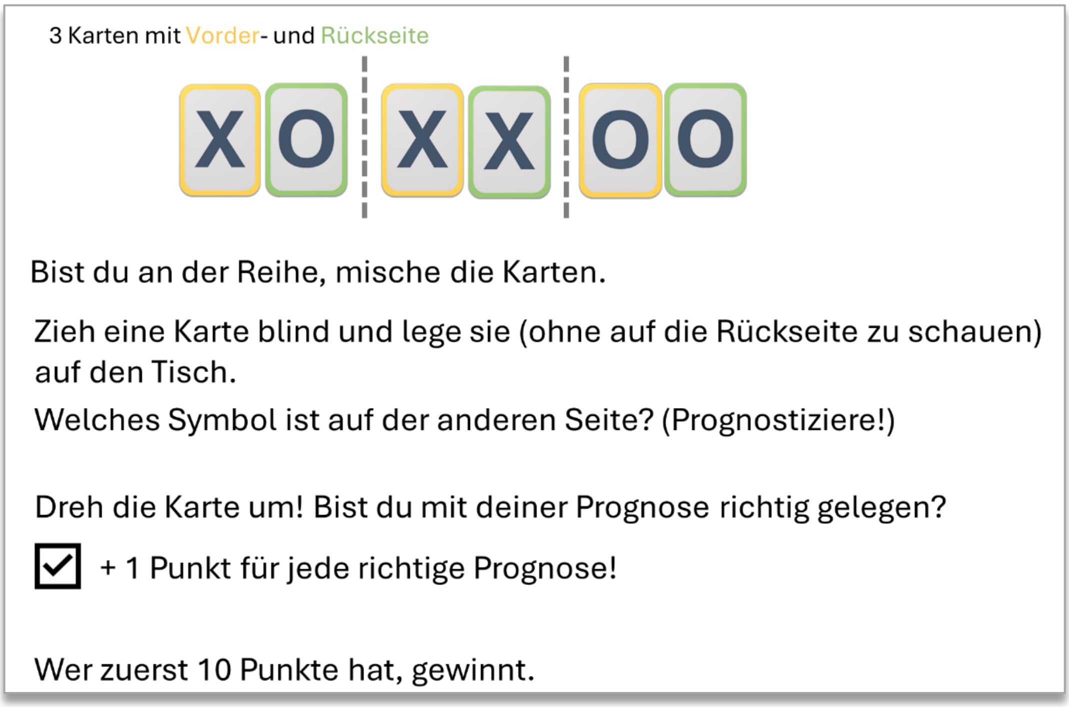

Abb. 4: Spielanleitung „XXO“

Didaktisch/methodische Ideen für den Unterricht

Die hier vorgestellten Umsetzungen im Unterricht orientieren sich wieder am Dreischritt mit den Sichtweisen auf prognostische, frequentistische und klassische Wahrscheinlichkeit.

1. Spielen und Wahrscheinlichkeit als subjektiver Vertrauensgrad:

Die Schülerinnen und Schüler spielen in Kleingruppen das Spiel in mehreren Durchgängen.

Mögliche Arbeitsaufträge für die erste Auseinandersetzung mit dem Spiel XXO sind in Abb. 5 dargestellt.

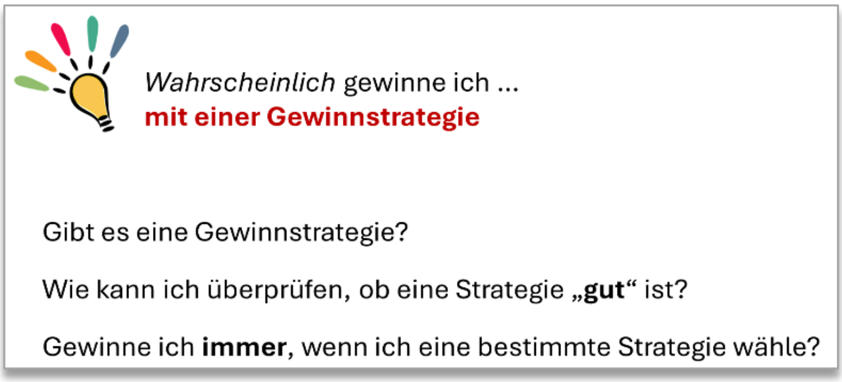

Abb. 5: Arbeitsaufträge zu XXO

Auf Basis der gesammelten Erfahrungen versuchen die Spielenden, eine geeignete Strategie zu entwickeln und diese in schriftlicher Form zu dokumentieren.

2. Datensammlung und relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit:

Im Anschluss an die erste Begegnung mit dem Spiel wird einer Person der Gruppe eine Spielstrategie vorgegeben, die sie während des gesamten Spiels ausführen muss.

> Vorgegebene Strategie:
> Prognostiziere für die Rückseite immer das Symbol,
> das du siehst!

In der Folge werden erneut einige Runden gespielt, deren Verläufe dokumentiert werden. Es erfolgt ein Vergleich der Ergebnisse des Spiels mit vorgegebener Strategie mit den Strategien der anderen Mitspielenden. An dieser Stelle kann eine Diskussion darüber initiiert werden, ob der Einsatz einer Spielstrategie zwangsläufig zu einem Sieg führt.

3. Spielanalyse und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:

In der nächsten Phase wird die vorgegebene Spielstrategie mathematisch analysiert. Die Strategie wird auf alle möglichen Ziehungsergebnisse angewandt und dargestellt, siehe dazu Abb. 6.

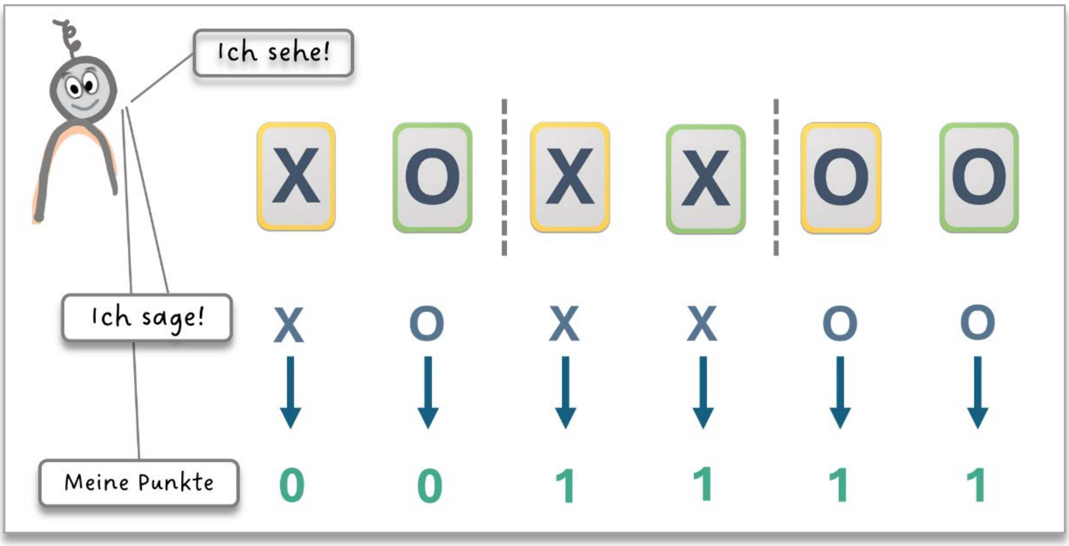

Abb. 6: Analyse der vorgegebenen Spielstrategie

Für ein Spiel gibt es sechs mögliche Ergebnisse für das Ziehen einer Karte: Vier davon sind mit der vorgegebenen Strategie für den Spieler bzw. die Spielerin günstig. In vier von sechs Fällen, d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, wird die richtige Prognose getätigt.

Sieg der Sterne

Hinweise

Zentrale fachliche Aspekte:

Bei diesem Spiel geht es darum, herauszufinden, welche Figur man zu Beginn wählen soll, um eine größere Gewinnwahrscheinlichkeit zu haben. Dazu ist es notwendig, eine Darstellungsform zu finden, in der alle möglichen Versuchsergebnisse enthalten sind. Da der Lehrplan das Zeichnen von Baumdiagrammen anregt, ist eine mögliche Variante, ein solches zu gestalten.

Materialien: 3 Sterne mit unterschiedlichen Farben auf Vorder- und Rückseite, siehe Abb. 6 rechts

Digitale Umsetzung: https://www.geogebra.org/m/zm29gsja

Spielende: 2 Personen, GELB & BLAU

Spielanleitung: siehe Abb. 7.

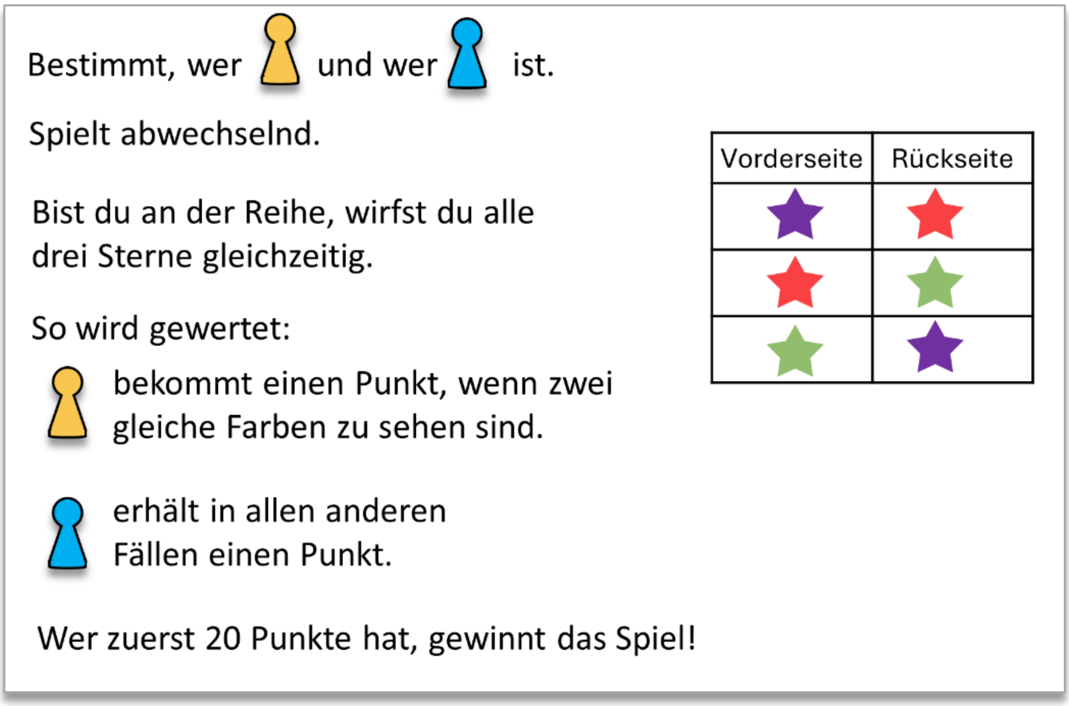

Abb. 7: Spielanleitung „Sieg der Sterne“

Didaktisch/methodische Ideen für den Unterricht

1. Spielen und Wahrscheinlichkeit als subjektiver Vertrauensgrad:

Das Spiel wird mehrere Durchgänge lang gespielt. Während des Spielens sammeln die Lernenden Erfahrungen und schätzen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit intuitiv ein.

Mögliche Arbeitsaufträge für die Untersuchung des Spiels „Sieg der Sterne“:

- Ist das Spiel fair?
- Wie kann ich alle möglichen Ergebnisse beim Werfen von diesen drei Sternen darstellen?
- Gibt es eine Gewinnstrategie?

Die Lernenden werden rasch feststellen, dass es in den meisten Fällen einen Unterschied macht, ob man zu Beginn BLAU oder GELB gewählt hat. Als Gewinnstrategie ist hier herauszufinden, dass man ja „nur“ den Beginn des Spiels beeinflussen kann, d.h. die Wahl der Farbe BLAU oder GELB. Die möglichen Ergebnisse beim Werfen der drei Sterne lassen sich in einem Baumdiagramm gut darstellen (siehe Abb. 7). Ergänzt wird die Abbildung noch die Kennzeichnung, ob BLAU oder GELB aufgrund der geworfenen Farben einen Punkt erzielt. (GELB erhält immer einen Punkt, wenn zwei gleiche Farben geworfen werden.)

2. Datensammlung und relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit:

Auch für das Spiel „Sieg der Sterne“ lassen sich Spielverläufe in Form einer Tabelle dokumentieren und relative Häufigkeiten ermitteln. Die vermutete Gewinnstrategie kann durch die gesammelten Daten überprüft werden.

3. Spielanalyse und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:

Die Mächtigkeit einer klug gewählten Darstellung wird hier thematisiert. Alle möglichen Wurfergebnisse der Sterne lassen sich mit Hilfe eines Baumdiagramms veranschaulichen (siehe Abb. 8).

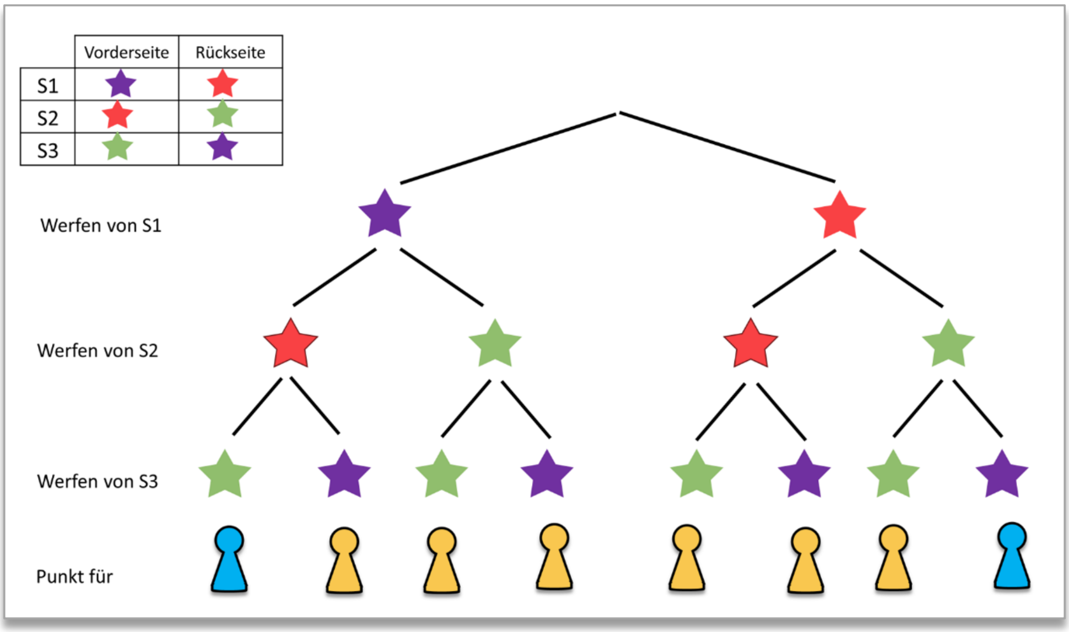

Abb. 8: Baumdiagramm für das Spiel „Sieg der Sterne"

Es gibt acht mögliche Wurfergebnisse. In nur zwei Fällen erhält BLAU einen Punkt, in sechs Fällen erhält GELB einen Punkt, oder anders formuliert, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ erhält BLAU einen Punkt, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ erhält GELB einen Punkt.

Schon durch die farbliche Darstellung ist es für die Lernenden einsichtig, dass eine gute Gewinnstrategie bei diesem Spiel ist, sich zu Beginn einer Runde für die Farbe GELB zu entscheiden.

LuLu – ein Spiel aus Hawaii

Mathematische Ideen existieren und entwickeln sich in vielen verschiedenen Kulturen. Daher ist es vielleicht einmal auch interessant ein Spiel aus einer anderen Kultur und Zeit kennenzulernen. Das hier vorgestellte Spiel wird schon seit langer Zeit auf Hawaii gespielt. (Naresh et al., 2014)

LuLu bedeutet schütteln, weil vier Steine, genannt u-lu, geschüttelt und dann geworfen werden. Die Steine lassen sich einfach selbst herstellen, indem Holzscheiben bemalt werden, siehe Abb. 8 oben. Sie sind auf einer Seite unbeschriftet und auf der anderen Seite mit (eins, zwei, drei und vier) Punkten markiert. Die Würfe werden wie folgt benannt:

Tab. 2: Vokabel zum Spiel LuLu

LuLu	schütteln
Hu-li la-lo	4 „leere“ Steine
Hu-ka-hi hu-i i-lu-na	1 Stein mit Punktmuster nach oben
E-lu-a hu-li i-lu-na	2 Steine mit Punktmuster nach oben
E-ko-lu hu-li i-lu-na	3 Steine mit Punktmuster nach oben
E-ha hu-li i-lu-na	alle 4 Steine mit Punktmuster nach oben

LuLu ist ein reines Zufallsspiel, bei dem es keine Gewinnstrategie zu entdecken gibt. Dafür kann aber der Fokus im Unterricht auf kollaboratives Arbeiten oder den Einsatz digitaler Medien gelegt werden.

Hinweise

Zentrale fachliche Aspekte:

In diesem Lernsetting steht die kollaborative Erhebung von Ergebnissen des Werfens der Steine im Mittelpunkt. Aus den erhobenen Daten werden relative Häufigkeiten zuerst in der Spielgruppe und dann in der ganzen Lernendengruppe bestimmt. Sind durch das systematische Aufsuchen alle möglichen Kombinationen beim Werfen mit vier Scheiben gefunden worden, können Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Diese werden anschließend mit den relativen Häufigkeiten in Beziehung gesetzt. Ein besonderer Fokus liegt auf dem Arbeiten mit Tabellen, wobei folgende Aspekte berücksichtigt werden:

- Erstellen von Tabellen
- Sammeln von Daten in Tabellen (Strichlisten, absolute und relative Häufigkeiten)

- Lesen von Tabellen (beginnend mit den Überschriften)
- Interpretation von Tabellen

Materialien: 4 LuLu-Steine

Digitale Umsetzung: https://www.geogebra.org/m/mpmdqjdx

Spielende: 2-4 Personen

Spielanleitung: siehe Abb. 9

Spielt reihum.
Bist du an der Reihe,
wirfst du alle 4 LuLu-Steine gleichzeitig.

Du darfst dir so viele Punkte aufschreiben,
wie die Steine zeigen.

Wer zuerst 50 Punkte hat, hat gewonnen!

Abb. 9: Spielanleitung „LuLu“

Didaktisch/methodische Ideen für den Unterricht

1. Spielen und Wahrscheinlichkeit als subjektiver Vertrauensgrad:

Das Spiel wird einfach ein paar Runden gespielt. Die Lernenden werden dazu aufgefordert, ihre Spielverläufe bestmöglich zu dokumentieren. Mit Hilfe der Unterlagen sollen dann folgende Fragen beantwortet werden:

- Wie viele Punkte darf sich jede Person in jeder Runde aufschreiben?
- Welche Punktzahlen kommen vor? Wie oft kommen sie jeweils vor?
- Wie oft muss jeweils geworfen werden, um 50 Punkte zu erreichen?

Die Lernenden sollen geeignete Tabellen erstellen (auch Überschriften erfinden), in denen sie alle Informationen festhalten. Z.B. so:

Tab. 3: Vorschlag zum Dokumentieren eines Spielverlaufs

Runde	Punkte dieser Runde	Punkte gesamt
⋮	⋮	⋮

2. Datensammlung und relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit:

In dieser Phase werden Daten gesammelt. Die Fragen, die es zu beantworten gilt, sind:

- Welche Punktzahlen kommen vor?
- Wie oft kommen sie jeweils vor?

Die Lernenden übertragen die Ergebnisse, die sie in Phase 1 während des Spielens in ihrer Gruppe gesammelt haben, in eine Tabelle mit folgender Struktur (Tab. 4):

Tab. 4: Vorschlag für eine Tabelle zum Sammeln der Gruppenergebnisse

Punktzahl			…
Strichliste			…
absolute Häufigkeit			…
relative Häufigkeit			…

Weiters tragen alle Spielgruppen die absoluten Häufigkeiten in eine Online-Tabelle ein. Diese Tabelle kann kollaborativ bearbeitet werden und zeigt Veränderungen in Echtzeit an, siehe Abb. 10.

			Wie oft ist bei euch die Punktzahl vorgekommen? Tragt eure Untersuchungsergebnisse jeweils in der entsprechenden Zeile in die nächste freie Zelle ein.									
Punkt-zahl	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
0	5	0,08	5									
1	10	0,16	10									
2	9	0,15	9									
3	5	0,08	5									
4	6	0,10	6									
5	8	0,13	8									
6	8	0,13	8									
7	3	0,05	3									
8	2	0,03	2									
9	5	0,08	5									
10	1	0,02	1									

Abb. 10: Screenshot kollaborative Online-Tabelle

„Möglichst alle Schülerinnen und Schülern sollten am Ende der Pflichtschulzeit verstanden und verinnerlicht haben: Wahrscheinlichkeitsangaben entwickeln bei wiederholbaren Zufallsexperimenten zur Vorhersage relativer Häufigkeiten erst bei relativ vielen Versuchswiederholungen ihre Bedeutung.“ (Hauer-Typpelt, 2022, S. 42) Aus diesem Grund werden hier zwei Tabellen miteinander verglichen: die der Spielgruppe und die der gesamten Klasse.

Durch den Vergleich der relativen Häufigkeiten der eigenen Spielgruppe mit denen der gesamten Klasse in der Online-Tabelle lässt sich die Unterschiedlichkeit dieser relativen Häufigkeiten gut diskutieren.

3. Spielanalyse und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:

In diesem Abschnitt geht es jetzt noch darum, strukturiert alle möglichen Punktzahlen, die beim Spiel LuLu geworfen werden können, zu finden. Findet man für jede Punktzahl auch alle möglichen Kombinationen, so lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten bestimmter Punktzahlen berechnen. Auch in dieser Phase hilft eine Tabelle, um die Ergebnisse übersichtlicher darzustellen, siehe Abb. 11.

Punkt-zahl	mögliche Kombinationen		Wie viele Arten?	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieser Punktzahl
0	0		1	$\frac{1}{16}$
1	1		1	$\frac{1}{16}$
2	2		1	$\frac{1}{16}$
3	3	1 + 2	2	$\frac{2}{16}$
4	4	1 + 3	2	$\frac{2}{16}$
5	1 + 4	2 + 3	2	$\frac{2}{16}$
6	2 + 4	1 + 2 + 3	2	$\frac{2}{16}$
7	3 + 4	1 + 2 + 4	2	$\frac{2}{16}$
8	1 + 3 + 4		1	$\frac{1}{16}$
9	2 + 3 + 4		1	$\frac{1}{16}$
10	1 + 2 + 3 + 4		1	$\frac{1}{16}$

Abb. 11: am Weg zur Berechnung der Laplace-Wahrscheinlichkeit

Am Ende werden nun die Unterschiede der relativen Häufigkeiten der Online-Tabelle und der berechneten Laplace-Wahrscheinlichkeiten diskutiert. Die Lernenden können dabei das Einpendeln der relativen Häufigkeiten bei den jeweiligen Wahrscheinlichkeitswerten unmittelbar nachvollziehen: Dieses Einpendeln wird mit wachsender Anzahl an unabhängigen Versuchswiederholungen besser („empirisches Gesetz der großen Zahlen").

5. Zusammenschau

Der Einsatz von Spielen im Mathematikunterricht kann den Unterricht interessanter und unterhaltsamer gestalten. Gut ausgewählte Spiele fördern das Verständnis mathematischer Konzepte und motivieren zum Lernen. Die im Artikel vorgestellten Spiele bieten vielfältige Möglichkeiten, um Stochastikinhalte in der Sekundarstufe 1 zu vermitteln.

In einem Dreischritt wird jeweils gezeigt, wie Spiele in mathematische Lerngelegenheiten transformiert werden können. Grundlage für diesen Dreischritt sind drei unterschiedliche Sichtweisen, die vermittelt werden sollen: prognostische, frequentistische und klassische Wahrscheinlichkeit. Ausgehend von der subjektiven Einschätzung der Gewinnwahrscheinlichkeit werden Daten erhoben, mit deren Hilfe die relative Häufigkeit bestimmt werden kann. Durch die Analyse des Spielmaterials bzw. des Spielablaufs können mit Hilfe der Laplace-Definition Wahrscheinlichkeiten für einzelne Ereignisse berechnet werden. Schließlich kann durch die Auseinandersetzung mit diesen Gesichtspunkten der Grundstein für das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten gelegt werden.

Die hier vorgestellten Spiele regen die Schülerinnen und Schüler vor allem dazu an, eigene Gewinnstrategien zu entwickeln und Spielentscheidungen auf der Grundlage mathematischer Überlegungen zu treffen. Sie spielen, sie stellen Spielverläufe dar, sie erheben Daten, sie führen Daten zusammen, berechnen Wahrscheinlichkeiten und begründen Spielstrategien auf Basis ihrer Berechnungen. Der Einsatz solcher Spiele regt die Lernenden dazu an, alle mathematischen Prozesse im Rahmen des zentralen fachlichen Konzepts Daten und Zufall ausführen zu können.

Wahrscheinlich gewinnen Sie, wenn Sie das eine oder andere Spiel in Ihren Unterricht einbauen!

Literatur

BMBWF. (2023). *Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule*. https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2023_II_1/Anlagen_0012_E1BFECE6_7E8B_4ACF_AEFD_3EC871222138.html

Hauer-Typpelt, P. (2022). Stochastik in der Sekundarstufe 1. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, 54, 35–49.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37962-8

Kleine, M., & Schmelzer, N. (2023). Steck weg, die 6! Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff verbinden. *Mathematik Lehren*, 236, 24–28.

Malle, G., & Malle, S. (2003). Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *Mathematik Lehren*, 118, 52–56.

Naresh, N., Harper, S. R., Keiser, J. M., & Krumpe, N. (2014). Probability Explorations in a Multicultural Context. *The Mathematics Teacher*, *108*(3), 184–192. https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.3.0184

Projekt Mathematische Bildung. (2011). *Spiele für den Mathematikunterricht*. https://matheprojekt.ph-tirol.at/content/spiele-für-den-mathematikunterricht

Sagmeister, G., Hirth, T., & Musilek, M. (2022). Teacher Training is the key: … and always will be. *R&E-SOURCE*. https://doi.org/10.53349/resource.2022.iS22.a1027

Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. *ZDM – Mathematics Education*, 55(2), 249–267. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01463-2

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Franzbecker.

Skene, K., O'Farrelly, C. M., Byrne, E. M., Kirby, N., Stevens, E. C., & Ramchandani, P. G. (2022). Can guidance during play enhance children's learning and development in educational contexts? A systematic review and meta-analysis. *Child Development*, 93(4), 1162–1180. https://doi.org/10.1111/cdev.13730

vom Hofe, R., & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik Lehren*, 236, 2–7.

Verfasserin
Monika Musilek
Pädagogische Hochschule Wien
Kompetenzzentrum für MINT und Digitalität
Grenzackerstraße 18
1100 Wien
monika.musilek@phwien.ac.at